École Centrale Paris

Projet de synthèse

Méthodes de simulation aux grandes échelles des écoulements turbulents à phase dispersée : Étude de la dynamique des particules dans des écoulements synthétiques

Auteur :

Liying Chen

Encadrant :

Aymeric Vié

20 mars 2015

Table des matières

1 Introduction **5**

2 Méthodes de simulation **7**
2.1 Resolution détaillée (Microscopique) 7
2.2 Approche Point-Particle (Mésoscopique) 7
2.3 Méthode des moments (Macroscopique) 8

3 Méthode des moments et simulation aux grandes échelles **10**
3.1 Méthodes ACBMM et méthodes KBMM 10
3.2 Simulation aux grandes échelles (LES) 10
3.3 Equation cinétique filtrée pour la LES 11

4 Etudes de dynamique des particules **13**
4.1 Méthodologie 13
4.2 Ecoulements unidimensionnels 13
4.2.1 Cas $u = \sin(wt)$ 13
4.2.2 Cas $u = u_0 \sin(\kappa x)$ 15
4.2.3 Cas général : $u = u_0 \sin(wt + \kappa x)$ 17
4.2.4 Conclusion sur l'études 1D 19
4.3 Taylor-Green Vortex 20
4.3.1 Résultats numérique en mouvement de particules . . 20
4.3.2 Analyse de mouvement des particules 22
4.3.3 Analyse de temps de relaxation vers le mouvement périodique 25
4.3.4 Analyse de diffusion des particules en temps et espace 29
4.3.5 Conclusion sur l'études de Taylor-Green Vortex 29
4.4 Diffusion des particules en présence d'une accélération 30
4.5 Ecoulements turbulents synthétiques 32
4.5.1 Superposition des modes 2D 32
4.5.2 Superposition des modes 3D 35

5 Conclusion **37**

1 Introduction

Les écoulements diphasiques sont souvent rencontrés dans la nature et les processus industriels (la suie dans l'air, les lits fluidisés en génie chimique ou encore les sprays dans les moteurs aéronautiques ou automobiles...), et conduisent souvent à la génération ou l'utilisation d'une phase liquide ou solide dispersée sous forme de gouttes ou particules. Tous ces écoulements à phase dispersée sont majoritairement turbulents. Différents approches numériques existent pour simuler ce type d'écoulement et peuvent se classer en trois niveaux : microscopique, mésoscopique et macroscopique. La simulation microscopique est faite à l'échelle de la particule et l'information détaillée de l'écoulement autour de la particule est obtenue par résolution des équations de la phase gazeuse à cette échelle. L'approche Point-Particle est au niveau mésoscopique, et se base sur l'hypothèse que la particule est plus petite que toutes les échelles de l'écoulement. Elle utilise alors des fermeture de type mésoscopique comme la loi de trainée de Stokes pour une sphere, ceci afin de ne pas avoir à résoudre les détails d'écoulement à l'échelle de la particule. Deux solutions sont alors disponibles : la méthode Lagrangienne et la méthode Eulerienne. La méthode Lagrangienne résout la trajectoire de chaque particules par le biais d'un système d'equations aux dérivées ordinaires. L'approche Eulerienne s'intéresse quant à elle aux quantités statistiques de la phase dispersée en résolvant la fonction densité de probabilité (FDP) par le biais d'une équation cinétique. Cette FDP évolue dans un espace des phases dont la dimension dépend de la complexité physique du problème, et peut donc prendre en compte la position, la vitesse de la particule, mais aussi sa taille, sa temperature, son volume...Intégrer une telle équation peut être très couteux en raison du nombre de dimension de l'espace des phases, et c'est pour cela qu'on peut s'intéresser aux approches macroscopiques : en intégrant l'équation cinétique dans l'espace des phases, on obtient des équations sur les moments de le FDP, comme par exemple la fraction volumique. Cette approche est très intéressante car elle conduit à des équations semblables à celle de la phase gazeuse et permet donc d'utiliser des algorithmes similaires. Cependant, du fait de l'intégration dans l'espace des phases, un problème de fermeture se pose afin de retrouver l'information perdue.

Le problème de fermeture des équations aux moments est dépendant de l'espace des phase initial. Si on se concentre sur la dynamique des particules, et on se concentre donc sur la position et la vitesse des particules, les méthodes de fermetures disponibles à ce jour peuvent être classées en deux types : ACBMM (Algebraic-closure-Based moment) et KBMM (Kinetic based moment). L'approche ACBMM[9, 10] se base sur des hypothèses sur les moments eux-mêmes, de type algébrique et/ou différentielle, afin de fermer les équations. L'approche KBMM se base quant à elle sur des hypothèses sur la fonction de distribution elle-même. Dans le présent travail, l'approche KBMM[5, 6] est préférée en raison de multiples avantages, notamment pour

un ensemble de propriétés mathématiques intéressantes (hyperbolicité par exemple), ceci aidant pour le développement schémas numériques[7, 14, 15].

Les approches évoquées précédemment partent du principe que toutes les échelles du problème mésoscopique sont résolues. Dans le cadre de configurations réalistes à fort nombre de Reynolds, cela devient beaucoup trop couteux. Afin d'éviter d'avoir à résoudre toutes ces échelles, on peut utiliser la méthode LES (large eddy simulation pour Simulation aux Grandes Echelles), où seulement les grandes échelles de l'écoulement sont résolues, alors que les petites échelles sont modélisées. Ce type d'approche bénéficie d'une littérature abondante pour les écoulements monophasiques. Dans le cadre des approches aux moments, plusieurs approches sont disponibles dans la littérature [12, 13, 11]. Parmi elles, seule l'approche de Moreau et al. [11] a à ce jour franchi la barre des calculs industriels de configurations réalistes, mais souffrent cependant de quelques limitation à la fois d'un point de vue physique et d'un point de vue numérique [1]. Dans l'équipe de mathématiques appliquées de M. Massot, de récents développements se concentrent sur l'approche proposée par Zaichik et al. [17], qui utilise un filtrage de l'équation cinétique, et demande donc de modéliser une correlation résiduelle entre la FDP et l'écoulement gazeux au travers du filtrage de la force de trainée.

Afin de déterminer la corrélation résiduelle, Zaichik et al. [17] ont proposé une modélisation qui a conduit à la définition de deux coefficients de diffusion dans l'espace des phases, qui sont la clé de voute de leur modèle. Ces coefficients représentent des quantités intégrées le long des trajectoires des particules et se basent sur certaines hypothèses et conduit donc à des limitations vis-à-vis du modèle final obtenu. L'objectif du présent projet se situe ici : afin de fermer ces modèles, une compréhension fine de la dynamique des particules est nécessaire. Dans ce projet, on se concentre sur l'analyse Lagrangienne de la trajectoire des particules par approche Lagrangienne, afin d'obtenir des informations sur cette interaction entre la phase porteuse et les particules. Afin de simplifier l'analyse, on va de plus s'intéresser à des écoulements gazeux synthétiques, ne nécessitant pas de solveur gazeux de type Navier-Stokes.

Ce rapport est organisé de la façon suivante. La section 2 présente les méthodes de simulation et se concentre sur la méthode Eulerienne. En Section 3, on dérive une équation cinétique basée sur NDF filtré en utilisant formalisme employé par Zaichik[16]. On en déduit un modèle pour la corrélation résiduelle. En Section 4, on présente l'étude de la dynamique des particules dans les contextes 1D, 2D et 3D. Des résultats numériques et une analyse détaillée sont montrés dans cette section. Un résumé de ce travail et ses perspectives sont discutés dans la section 5.

2 Méthodes de simulation

Les stratégies actuelles pour simuler un écoulement à phase dispersée peuvent être classifiées en trois niveaux comme montrés en Figure 1. Chaque niveau se démarque par le type d'hypothèses utilisées, conduisant ainsi à une précision et un coût calcul croissant avec le niveau de détail.

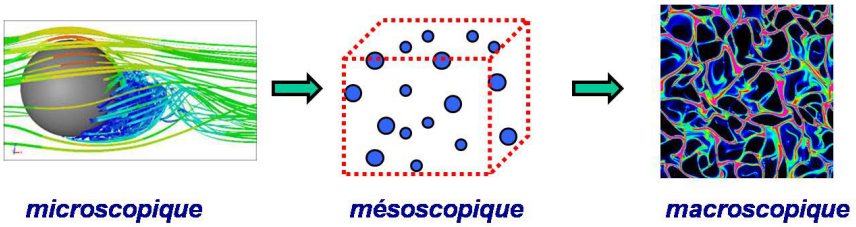


FIGURE 1 – Simulation à phase dispersée au trois niveaux microscopique, mésoscopique et macroscopique.

2.1 Resolution détaillée (Microscopique)

La résolution détaillée consiste à étudier les mouvements du fluide autour de la particule et leurs effets sur cette particule, par la solution numérique des équations régissant le fluide. Les équations résolues peuvent être les équations d'Euler ou les équations de Navier-Stokes. L'écoulement est simulé de manière détaillée au niveau microscopique, c'est à dire à l'échelle de la particule. C'est le meilleur niveau de précision accessible pour simuler une l'évolution d'une particule dans un écoulement gazeux, mais cela a pour désavantage d'être extrêmement couteux, et par conséquent difficilement accessible pour des systèmes contenant plusieurs milliers de particules (voire plusieurs millions).

2.2 Approche Point-Particle (Mésoscopique)

Dans les écoulements diphasiques, on traite souvent la particule comme un point dans le champ turbulent, ce qui est possible si cette particule est plus petite que toutes les échelles de l'écoulement. Au niveau mésoscopique, il se distingue deux catégories : Lagrangienne et Eulerienne.

Dans la méthode Lagrangienne, le mouvement des particules dans l'écoulement turbulent se décrit par les équations de type Langevin :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_p}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}_p, \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{R}_p(t), t) - \mathbf{v}_p}{\tau_p} \tag{1}$$

où $\mathbf{R}_p$ et $\mathbf{v}_p$ sont la position et la vitesse de la particule, τ_p est leur temps de relaxation et $\mathbf{u}$ la vitesse de l'écoulement gazeux. La méthode lagrangienne

est simple et intuitive mais peut poser des difficultés dans le cadre de calcul parallèles haute-performance [4] quand le nombre de particules devient trop important ou quand leur distribution spatiale est très inhomogène.

L'approche Eulerienne s'intéresse à des quantités statistiques de la phase dispersée, en résolvant la fonction densité de probabilité de cette phase dispersée [1] :

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{R}_p(t))\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_p(t)) \tag{2}$$

En différentiant par rapport au temps, l'équation cinétique statistique dans le cadre Eulerienne s'exprime ainsi :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \underbrace{v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}_{\text{convection}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial v_i}\Big(\frac{u_i - v_{pi}}{\tau_p} f\Big)}_{\text{trainée}} = 0 \tag{3}$$

où x_i est la position spatiale et v_i est la vitesse dans l'espace des phases. $\mathbf{u}$ est la vitesse gazeuse. Comme indiqué, le deuxième terme correspond à la convection des particules, alors que le troisième terme correspond à la relaxation de la vitesse des particules vers celle du gaz.

2.3 Méthode des moments (Macroscopique)

L'intérêt de méthode des moments est qu'elles permettent d'obtenir directement des quantités globales des particules données par l'intégration de f dans l'espace des vitesses, comme la concentration en nombre n_p, vitesse corrélée v_{pi} et covariance de vitesse $\delta R_{p,ij}$:

$$n_p(x,t) = \int f(\mathbf{c_p}, x, t)\mathrm{d}\mathbf{c}_p \tag{4}$$

$$u_{p,i}(x,t) = \frac{1}{n_p}\int c_{p,i} f_p(\mathbf{c}_p, x, t)\mathrm{d}\mathbf{c}_p \tag{5}$$

$$\delta R_{p,ij} = \frac{1}{n_p}\int (c_{p,i} - u_{p,i})(c_{p,j} - u_{p,j}) f_p(\mathbf{c}_p, x, t)\mathrm{d}\mathbf{c}_p \tag{6}$$

Les équations de transport pour la concentration en nombre et la vitesse corrélée sont obtenues par integration de l'équation cinétique (3) :

$$\frac{\partial n_p}{\partial t} + \frac{\partial n_p u_{p,j}}{\partial x_j} \tag{7}$$

$$\frac{\partial n_p u_{p,i}}{\partial t} + \frac{\partial n_p (u_{p,i}}{p, j} + \delta R_{p,ij}) = n\frac{u_{g,i}}{u_{p,i}} \tag{8}$$

Pour fermer les équations dans la méthode des moments, on a besoin de modéliser le tenseur $\delta R_{p,ij}$. Ce terme contient les informations sur la variance

1. on se concentre ici sur la dynamique des particules, on limite donc l'espace des phases à la position et la vitesse

de la vitesse des particules autour de la vitesse moyenne, de la même manière que la température du gaz correspond à une agitation des molécules autour de la vitesse matérielle. Plusieurs méthodes sont disponibles dans la littérature pour modéliser ce terme, et une brève introduction est présentée dans la section suivante.

3 Méthode des moments et simulation aux grandes échelles

Les méthodes de moments se distinguent avant tout par la méthode utilisée pour fermer les équations aux moments. La complexité de la fermeture va dépendre de la complexité de la physique associée, autant en terme de nombre de variables de l'espace des phases, que de complexité propre à une dimension de l'espace des phases. On se concentre ici sur la dimension vitesse des particules. La complexité de la méthode Eulerienne dans ce cadre est de fermer la matrice $\delta R_{p,ij}$ précédemment présentée. Plusieurs modèles se contentent de la considerer nulle [8, 2, 3, 5], hypothèse valable dans le cadre de particules à faible nombre de Stokes (ratio entre le temps de relaxation des particules et une échelle temporelle caractéristique de l'écoulement), mais mise en défaut pour des nombres de Stokes modérés à élevés.

3.1 Méthodes ACBMM et méthodes KBMM

Les deux méthodes ACBMM et KBMM diffèrent dans la manière de fermer les équations. D'un coté l'approche ACBMM [9, 10] se base sur des hypothèses sur les moments pour fermer le système d'équations, comme par exemple avec l'utilisation de fermetures de type viscosité. D'un autre coté l'approche KBMM [6, 15] se base sur une hypothèse sur la forme de la FDP sous-jacente, de manière équivalente à ce qui est fait pour les équations d'Euler, obtenues en faisant l'hypothèse Maxwellienne pour le distribution en vitesse des molécules. L'équipe de mathématiques appliquées de M. Massot à EM2C se concentre sur ce deuxième d'approche en raison des propriétés mathématiques qui peuvent en découler, comme par exemple l'hyperbolicité qui permet de dériver des schémas numériques dédiés assurant la réalisabilité du système d'équations.

3.2 Simulation aux grandes échelles (LES)

Dans le méthode précédente, tous les échelles turbulentes sont résolues, ce qui est inaccessible pour la simulation de configurations réalistes à très grand nombre de Reynolds. Afin d'éviter de simuler tout le spectre d'échelles, la simulation aux grandes échelles (LES ou large eddy simulation en anglais) se limite à simuler les grandes structures énergétiques tout en en modélisant les petites échelles.

Pour obtenir es équations filtrées, une opération de filtrage spatial est nécessaire :

$$\overline{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, \triangle)\varphi(\mathbf{x}_1, t)\mathrm{d}\mathbf{x}_1, \tag{9}$$

où la fonction de filtre satisfait la condition de normalisation :

$$\int G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1, \triangle)\mathrm{d}y_1 = 1,$$

Et $\triangle$ symbolise le largeur de filtre. Quand on choisit la valeur de $\triangle$ plus grande que la longueur de Kolmogorov, $\overline{\varphi}_{\mathbf{x},t}$ peut être vu comme contenant la composante aux grandes échelles de $\varphi(\mathbf{x}, t)$.

Les approches LES pour les méthodes de moments ayant permis des simulations de configurations réelles se limitent pour l'instant aux travaux de Moreau et al. [11], qui se base sur un filtrage des équations aux moments et des fermetures de type ACBMM et donc aussi basées sur les moments résolus. De nouveau, l'équipe de mathématiques appliquées se concentrent sur une approche de type KBMM basée sur un filtrage de l'équation cinétique et présentée ci-après.

3.3 Equation cinétique filtrée pour la LES

Zaichik et al. [17] ont défini un formalisme complet de simulation aux grandes échelles basé sur un filtrage de l'équation cinétique, mais qui n'a à ce jour pas été évalué pour simuler des écoulements. Premièrement, ils filtrent l'équations cinétique (3) conformément à (9) :

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial v_i}\Big(\frac{\overline{u_i} - v_i}{\tau_p}\overline{f}\Big) = -\frac{1}{\tau_p}\frac{\partial (u_i f)^r}{\partial v_i} \tag{10}$$

où la corrélation residuelle entre la vitesse de particule et fonction de densité en nombre est définie par :

$$(u_i f)^r = \overline{u_i f} - \overline{u_i}\,\overline{f}$$

C'est cette corrélation $(u_i f)^r$ qui nécessite une fermeture devant representer les interactions entre la phase dispersée et la phase porteuse.

Afin de déterminer la corrélation $(u_i f)^r$, qui décrit l'interaction entre les particules et les tourbillons de petites échelles non résolus, Zaichik et Simonin[17] modélisent la vitesse turbulente par un processus aléatoire Gaussien et appliquent leur formalisme afin d'obtenir l'équation cinétique pour NDF statistique.
| La fermeture proposée est la suivante :

$$(u_i f)^r = -\tau_p\Big(\lambda_{ij}^r(\mathbf{x}, t)\frac{\partial \overline{f}}{\partial v_j} + \mu_{ij}^r(\mathbf{x}, t)\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_j}\Big) \tag{11}$$

avec

$$\lambda_{ij}^r = \tau_{ik}^r\Big(\frac{f_u^r}{\tau_p}\delta_{kj} + l_u^r\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k}\Big), \qquad \mu_{ij}^r = g_u^r \tau_{ij}^r, \tag{12}$$

$$f_u^r = \frac{1}{\tau_p}\int_0^\infty \mathbf{\Psi}_{LP}^r(\tau)\exp\Big(-\frac{\tau}{\tau_p}\Big)\mathrm{d}\tau, \qquad g_u^r = \frac{T_{LP}^r}{\tau_p} - f_u^r, \tag{13}$$

$$l_u^r = g_u^r - \frac{1}{\tau_p^2}\int_0^\infty \mathbf{\Psi}_{LP}^r(\tau)\exp\Big(-\frac{\tau}{\tau_p}\Big)\mathrm{d}\tau. \tag{14}$$

Les coefficients f_u^r, g_u^r et l_u^r mesurent une réponse des particules aux tourbillons de petites échelles non-résolus, i.e. un couplage entre les particules et l'écoulement turbulent de sous-maille. La quantité $T_{LP}^r \equiv \int_0^\infty \mathbf{\Psi}_{LP}^r \mathrm{d}\tau$ est l'échelle de temps intégral lagrangien de vitesses turbulente résiduelles le long de trajectoire de particules.

A ce stade, on peut voir que le modèle LES depend de deux coefficients λ_{ij} et μ_{ij}. Ces deux coefficients sont la conséquence de l'interaction entre les particules et les tourbillons de sous-maille. Ils dépendent ainsi de deux informations : la corrélation le long de la trajectoire des particules $\mathbf{R}_p$ et l'hypothèse de Gaussiannité invoquée par Zaichik et Simonin[17]. Afin de pouvoir évaluer $\mathbf{R}_p$ et la validité de l'hypothèse Gaussienne, ce projet de synthèse se propose d'étudier de la dynamique des particules dans des écoulements turbulents.

4 Etudes de dynamique des particules

4.1 Méthodologie

Dans cette section, on présente la simulation d'écoulements turbulents synthétiques pour obtenir la position $x_p(t)$ et la vitesse des particules $v_p(t)$. Pour bien comprendre les mouvements des particules dans les écoulements turbulents diphasiques, on fait la simulation d'écoulements simples ceci afin d'éviter la simulation des équations de Navier-Stokes mais aussi afin d'isoler les phénomènes physiques. La première partie consiste en étude des mouvement des particules dans un contexte 1D. Dans la seconde partie, les résultats bidimensionnels sont obtenus par les simulations de Taylor-Green vortex et superposition des modes. Finalement, on simule l'écoulement turbulent tridimensionnel en extension directe des cas 2D.

4.2 Ecoulements unidimensionnels

L'équation lagrangienne est appliquée au mouvement des particules dans un écoulement unidimensionnel. Pour la simplicité et la représentativité, l'écoulement de type sinusoïdal a été choisi.

$$u = u_0 \sin(\omega t + \kappa x) \tag{15}$$

Ici ω est la vitesse d'onde, κ est le nombre d'onde et u_0 est l'amplitude d'onde. Cette forme d'écoulement représente un "mode" de turbulence. Le système résultant d'équations est le suivant :

$$\frac{\mathrm{d}x_p}{\mathrm{d}t} = v_p \qquad \frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}t} = \frac{u_0 \sin(\omega t + \kappa x) - v_p}{\tau_p} \tag{16}$$

Pour déterminer la position d'équilibre et analyser la stabilité, la simulation se divise en trois cas : les deux cas spéciaux avec $\kappa = 0$ ou $\omega = 0$ et le cas général $\kappa \neq 0$ et $\omega \neq 0$.

4.2.1 Cas $u = \sin(wt)$

Résultats numérique et analytique l'équation dimensionnelle dans ce cas est :

$$\frac{\mathrm{d}x_p}{\mathrm{d}t} = v_p \qquad \frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}t} = \frac{\sin t - v_p}{St_w} \tag{17}$$

où St_w représente le nombre de Stokes d'écoulement. Il est défini come suit :

$$St_w = \frac{\tau_p}{\tau_l} = \tau_p \omega$$

Figure 2 montre le résultat numérique par une particule à $St_w = 0.2$: La particule suit le gaz à la même fréquence, mais avec un déphasage et

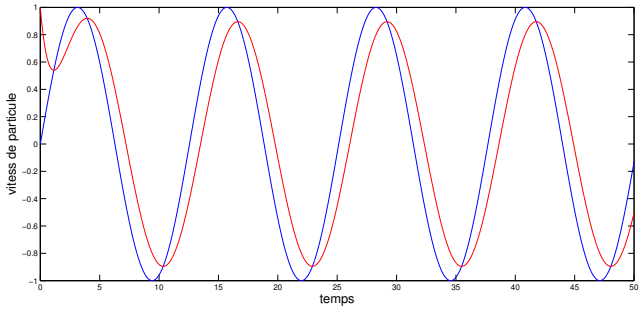


FIGURE 2 – Vitesse de particule dans un écoulement unidimensionnel sinusoïdal $u = \sin(wt)$ pour un nombre de Stokes de 0.2.

une différence d'amplitude. Pour comprendre ce résultat, on s'intéresse à la solution analytique suivante :

$$x_p(t) = c_0 + c_1 e^{-t/St_w} - \frac{1}{1+St_w^2}\cos t - \frac{St_w}{1+St_w^2}\sin t \tag{18}$$

$$c_1 = -\Big(\frac{St_w}{1+St_w^2} + u_{p0}\Big)St_w \qquad c_0 = x_{p0} + 1 + u_{p0} \tag{19}$$

Dans la solution analytique, il existe deux parties : un partie de relaxation $c_0 + c_1 e^{-t/St_w}$ et une partie de solution au temps long $-\frac{1}{1+St_w^2}\cos t - \frac{St_w}{1+St_w^2}\sin t$. Il exite donc un déphasage entre la particule et le gaz qui depends le nombre de Stokes.

$$\triangle\varphi = \arcsin\Big(\frac{St_w}{\sqrt{1+St_w^2}}\Big)$$

Quand $St_w = 0$ i.e. $\tau_p = 0$, le déphasage $\triangle\varphi = 0$ et quand $St_w = \infty$, le déphasage $\triangle\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Comparaison des schémas numériques Afin de vérifier le validité du schema numérique et comparer les erreurs, on va montrer les erreurs des méthodes Euler, Runge-kutta 2 (RK2), Runge-kutta 3 (RK3) et Runge-kutta 4 (RK4) avec la solution analytique dans le cas $u = \sin(wt)$. L'erreur est exprimée comme suit :

$$E = \int_0^{T_{max}} (v_p^A - v_p^N)^2 \mathrm{d}t$$

Figure 3 montre le résultat de comparaison des quatre méthodes. Evidement, quand le pas de temps est petit, les quatre méthodes sont valides. L'erreur de méthode Euler augmente le plus vite avec le pas de temps. Par contre, le

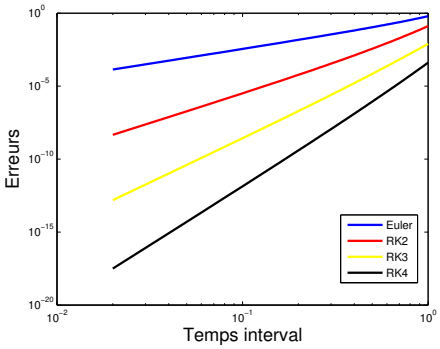


FIGURE 3 – Erreurs de quatre méthodes (Euler, RK2, RK3, RK4) pour un nombre de Stokes de 0.5 dans un écoulement sinusoïdal $u = \sin(wt)$

méthode de RK4 est meilleur que les autres méthodes. On utilise la méthode Euler dans la suite parce que elle est simple et suffisamment précis quand le pas de temps est petit.

4.2.2 Cas $u = u_0 \sin(\kappa x)$

L'équation adimensionnelle dans ce cas s'exprime :

$$\frac{\mathrm{d}x_p}{\mathrm{d}t} = v_p \qquad \frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}t} = \frac{\sin x_p - v_p}{St_\kappa} \tag{20}$$

où $St_\kappa = \tau_p(u_0\kappa)$.

Le premier pas est d'analyser la stabilité et de déterminer les positions d'équilibre. Un point d'équilibre mathématique est défini comme :

$$v_p = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{21}$$

Dans ce cas, ils sont données comme :

$$x_p = n\pi \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

L'évolution du système pour les différents nombres de Stokes est représentée dans la Figure 4. Pour St_κ faible, la particule arrive au premier point d'équilibre directement. Pour St_κ plus élevé, la figure montre que la particule arrive au deuxième point d'équilibre. Si on élève St_κ encore, le particule évolue au troisième point d'équilibre périodiquement.

On analyse la stabilité de point d'équilibre d'un point de vue mathématique. L'équation de mouvement est linéarisée autour le point d'équilibre par la matrice Jacobienne, J comme suit :

$$\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x_0 \\ u_0 \end{pmatrix} \tag{22}$$

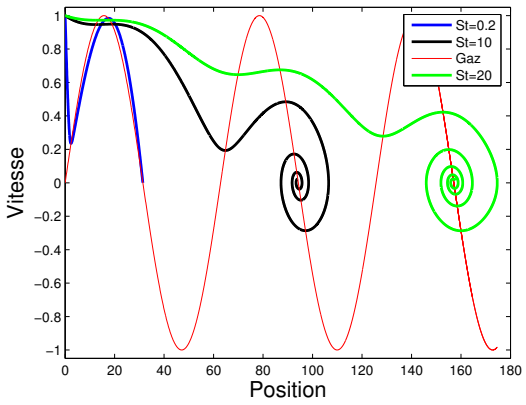


FIGURE 4 – Vitesses des particules dans un écoulement unidimensionnel sinusoïdal $u = u_0 \sin(\kappa x)$ pour un nombre de Stokes de 0.2, 10 et 20.

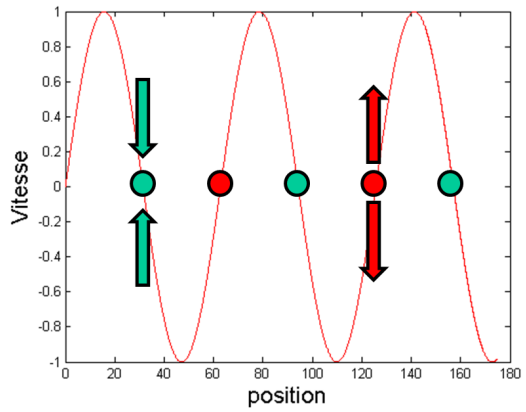


FIGURE 5 – Direction de vitesses de gaz autour les points d'équilibre dans un écoulement unidimensionnel sinusoïdal $u = u_0 \sin(\kappa x)$.

La Jacobienne pour le point d'équilibre x_0 devient :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\cos x_0}{St_\kappa} & -\frac{1}{St_\kappa} \end{pmatrix} \tag{23}$$

Quand $x_0 = 2n\pi (n = 0, 1, 2, \cdots)$, les valeurs propres de la matrice ci-dessus sont, $\kappa_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1 + 4St})/2St$. Pour tous les valeurs de $St > 0$, il existe au moins une valeur propre réelle et positive et que donc le point est instable. D'un autre côté, Quand $x_0 = (2n + 1)\pi (n = 0, 1, \cdots)$ les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont, $\kappa_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 4St}/2St$. Pour tous les valeurs de St, la partie réelle des valeurs propres est négative et c'est donc stable. La partie imaginaire dit juste que la solution va osciller autour du point d'équilibre. Cependant, pour $St < 1/4$, il n'existe pas de la partie imaginaire des valeurs propres, la convergence est donc monotonice vers le point d'équilibre. Pour $St > 1/4$, les valeurs propres contiennent une partie imaginaire. Il démontre que la solution oscille autour du point d'équilibre.

On analyse la stabilité du point d'équilibre d'une point de vue physique dans Figure 5. Les vitesses autour les points verts se dirigent vers le point d'équilibre qui est stable. Au contraire, autour des points rouges, les vitesses dévient du point d'équilibre, qui est alors instable.

4.2.3 Cas général : $u = u_0 \sin(wt + \kappa x)$

L'espace adimensionnelle et le temps adimensionnel sont choisi scomme suit :

$$x' = \omega t + \kappa x \qquad t' = \omega t$$

L'équation adimensionnelle dans ce cas s'exprime :

$$\frac{\mathrm{d}x_p}{\mathrm{d}t} = v_p \qquad \frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{St_w}\Big[\frac{St_\kappa}{St_w}\sin(x_p) + 1 - v_p\Big] \tag{24}$$

et met donc en évidence les deux nombres de Stokes présentés précédemment. Dans l'espace adimensionnelle, le point d'équilibre mathématique est défini :

$$v_p = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{25}$$

Dans ce cas, quand $St_\kappa < St_w$, il n'existe pas de point d'équilibre. Quand $St_\kappa \geq St_w$, ils sont données comme :

$$x_p = 2n\pi - \sin^{-1}(\frac{St_w}{St_\kappa}) \qquad (n = \cdots -1, 0, 1, \cdots)$$

et

$$x_p = (2n + 1)\pi + \sin^{-1}(\frac{St_w}{St_\kappa}) \qquad (n = \cdots -1, 0, 1, \cdots)$$

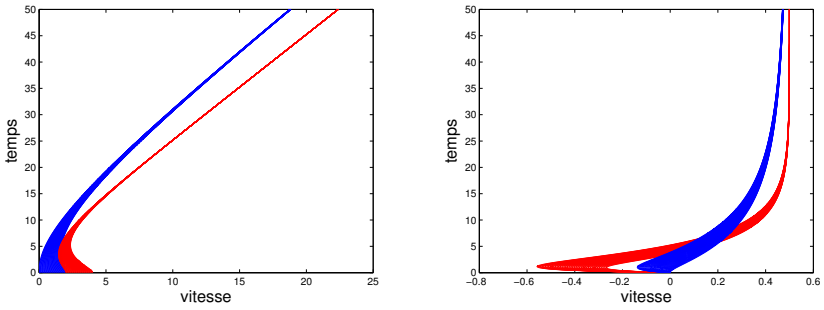


FIGURE 6 – Evolution de position (gauche) et vitesse (droite) des particules dans un écoulement unidimensionnel sinusoïdal pour un nombre de Stokes $St_\kappa < St_{\kappa c}$.

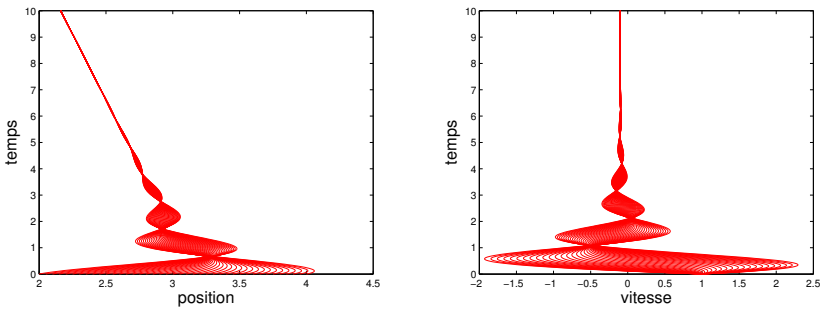


FIGURE 7 – Evolution de position (gauche) et vitesse (droite) des particules dans un écoulement unidimensionnel sinusoïdal pour un nombre de Stokes $St_\kappa > St_{\kappa c}$.

On analyse la stabilité de point d'équilibre d'un point de vue mathématique. L'équation de mouvement est linéarisée autour le point d'équilibre par la matrice Jacobienne. La Jacobienne pour le point d'équilibre x_0 devient :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{St_\kappa}{St_w^2}\cos x_0 & -\frac{1}{St_w} \end{pmatrix} \tag{26}$$

Quand $x_0 = 2n\pi - \sin^{-1}(\frac{St_w}{St_\kappa})$, les valeurs propres de la matrice ci-dessus sont, $\kappa_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{St_\kappa^2 - St_w^2}})/2St_w$. Pour tous les valeurs de $St_\kappa \geq St_w$, il existe au moins une valeur propre réelle et positive. Le point est donc instable. D'un autre côté, quand $x_0 = (2n+1)\pi + \sin^{-1}(\frac{St_w}{St_\kappa})$, les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont $\kappa_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 4\sqrt{St_\kappa^2 - St_w^2}}/2St$. Pour toutes les valeurs de $St_\kappa \geq St_w$, la partie réelle des valeurs propres est négative et c'est donc stable. La partie imaginaire dit juste que la solution va osciller autour du point d'équilibre.

Pour $St_\kappa \leq St_{\kappa c} = \sqrt{St_w^2 + \frac{1}{16}}$, Figure 6 montre que la position et la vitesse de la particule évoluent en fonction du temps. Les particules sont attachées à la position d'équilibre. Cependant, pour $St_\kappa \geq St_{\kappa c}$, la trajectoire de la particule est représentée dans le Figure 7. Les particules traversent et oscillent vers la positon d'équilibre.

4.2.4 Conclusion sur l'études 1D

Dans le contexte 1D, on trace les trajectoires des particules qui suivent un écoulement sinusoïdal $u = u_0 \sin(\omega t + \kappa x)$. Après un temps de relaxation, des particules suivent le fluide en même fréquence, des particules arrivent aux points d'équilibre et des particules se déplacent à la vitesse constante. Résultats 1D montrent que la dynamique des particules dépend intensivement de la structure du champ gazeux et du nombre de Stokes. Pour une étude plus détaillée et complexe de la dynamique des particules, il est nécessaire de continuer notre étude avec des cas 2D et 3D.

4.3 Taylor-Green Vortex

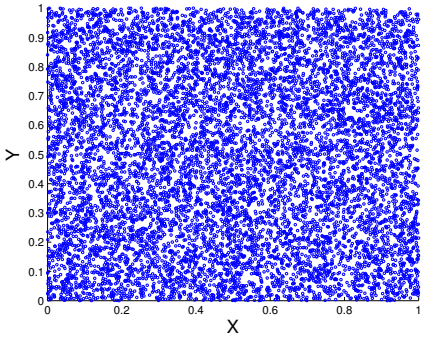


FIGURE 8 – Positions initiales de particules dans un écoulement de type Taylor-Green.

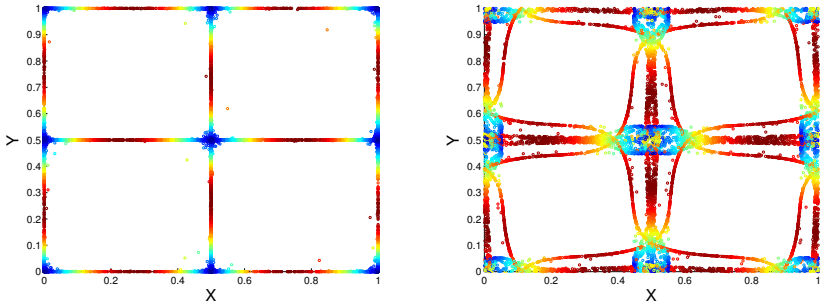


FIGURE 9 – Distribution de particules dans un écoulement de type Taylor-Green pour un nombre de Stokes $St = 1/2St_c$ (gauche) et un nombre de Stokes $St = 5St_c$ (droite).

Dans la suite, on va étudier l'évolution de particules dans un context bi-dimensionnel. Pour modéliser le champ d'écoulement turbulent, on choisit les tourbillons de Taylor-Green, qui sont une solution analytique des équations de Navier-Stokes incompressible.

4.3.1 Résultats numérique en mouvement de particules

La vitesse de gaz dans Taylor-Green est la suivante :

$$\begin{cases} u_g = \sin(2\pi x)\cos(2\pi y) \\ v_g = -\cos(2\pi x)\sin(2\pi y) \end{cases}$$

Afin d'observer l'évolution des particules, on distribue 10000 particules aléatoirement dans l'espace carré $[0,1] \times [0,1]$. Figure 8 représente les positions initiales de particules et leurs vitesses initiales étaient nulles.

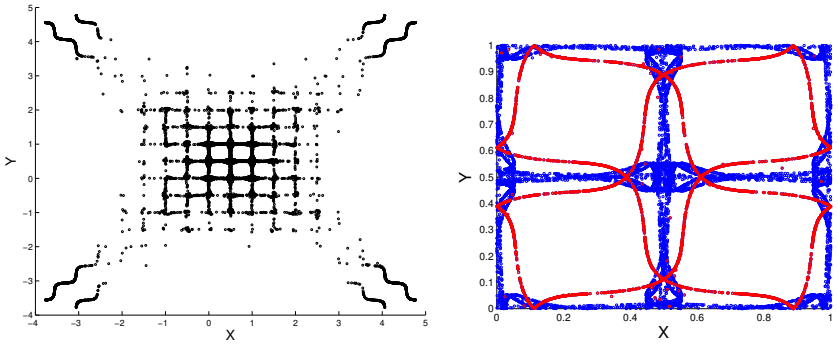


FIGURE 10 – Distribution de particules dans un écoulement de type Taylor-Green pour un nombre de Stokes $St = 5St_c, t = 10s$ sans "modulo"(gauche) et en "modulo" (droite).

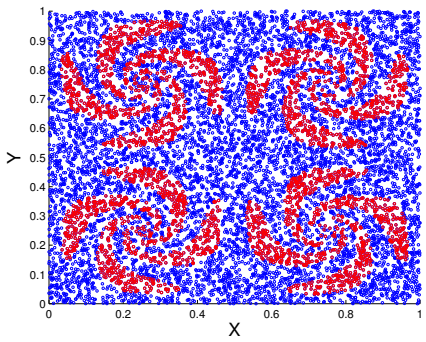


FIGURE 11 – Coloration des particules à leur position initiale par leur vitesse finale pour $St = 5St_c, t = 10s$

On voit une dynamique différente selon le nombre de Stokes des particules dans le Figure 9 : à faible Stokes, les particules s'accumulent sur les lignes entre les tourbillons ; à fort Stokes, des structures beaucoup plus complexes apparaissent.

Pour St fort, $t = 10s$, si on regarde la position des particules sans "modulo" dans la Figure 10 (gauche), des particules se propagent à grande vitesse ; d'autres se propagent lentement au centre. Afin de séparer les particules de mouvement différent, en coloration des particules en fonction du module de la vitesse, On identifie clairement des trajectoires d'équilibre comme étant des trajectoires à forte vitesse dans la Figure 10(droite). Corrélativement, on identifie l'origine des particules déjà présentes sur les trajectoires d'équilibre dans la Figure 11 en colorant des particules à leur position initiale par leur vitesse finale. On a conclut donc que ces trajectoires d'équilibre peuvent résulter d'une dynamique spécifique que nous souhaitons donc identifier.

4.3.2 Analyse de mouvement des particules

D'abord, on cherche les points d'équilibre dans Taylor-Green. Il faut :

$$u_g = 0 \qquad v_g = 0$$

Les points d'équilibre sont obtenus :

$$\begin{cases} x = \frac{n_1}{2} \\ y = \frac{n_2}{2} \end{cases} \qquad ou \qquad \begin{cases} x = \frac{2n_1+1}{4} \\ y = \frac{2n_2+1}{4} \end{cases} \qquad (n_1, n_2 = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$$

Pour l'analyse de la stabilité des points d'équilibre, une méthode plus simple consiste à écrire le système linéarisé et le résoudre.

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = F(Q)$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = F(Q_0) + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}Q}(Q - Q_0)$$

Donc, l'equation de mouvement est linéarisée autour le point d'équilibre par la matrice Jacobienne, J comme suit :

$$\mathbf{J} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}Q}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} x_0 \\ Y_0 \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

Le Jacobien pour le point d'équilibre de (x_0, y_0) devient :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2\pi}{\tau_p}\cos 2\pi x_0 \cos 2\pi y_0 & -\frac{2\pi}{\tau_p}\sin 2\pi x_0 \sin 2\pi y_0 & -\frac{1}{\tau_p} & 0 \\ \frac{2\pi}{\tau_p}\sin 2\pi x_0 \sin 2\pi y_0 & -\frac{2\pi}{\tau_p}\cos 2\pi x_0 \cos 2\pi y_0 & 0 & -\frac{1}{\tau_p} \end{pmatrix} \tag{28}$$

Quand $x = \frac{n_1}{2}$ et $y = \frac{n_2}{2}$, les valeurs propres de la matrice J sont,

$$\kappa_{1,2} = \frac{1}{2\tau_p}(-1 \pm \sqrt{1 - 8\pi\tau_p})$$

et

$$\kappa_{3,4} = \frac{1}{2\tau_p}(-1 \pm \sqrt{1 + 8\pi\tau_p})$$

Quand $x = \frac{2n_1+1}{4}$ et $y = \frac{2n_2+1}{4}$, les valeurs propres doubles de la matrice J sont,

$$\kappa_{1,2} = \frac{1}{2\tau_p}(-1 + \sqrt{1 - 8\pi\tau_p i})$$

et

$$\kappa_{3,4} = \frac{1}{2\tau_p}(-1 - \sqrt{1 + 8\pi\tau_p i})$$

. Le nombre de stokes critique est : $St_c = \frac{1}{8\pi}$. Dans tous les cas, on voit qu'il existe au moins une valeur propre à partie réelle positive, ce qui fait qu'il n'existerait pas de point stable. Cependant nos résultats démontrent le contraire, et nous conduisent à penser à une éventuelle erreur de calcul dans les valeurs propres. Ce point devra être étudié plus précisément dans la suite du projet.

Dans le paragraphe précédent, il existe des particules qui arrivent aux points d'équilibre. Quand une particule se situe à la position initiale (0.5,0.3), le Figure 12 montre l'évolution de l'énergie cinétique et l'espace de phase en direction y. On peut voir qu'il va rester dans la position (0.5,0.5). Deuxièmement,

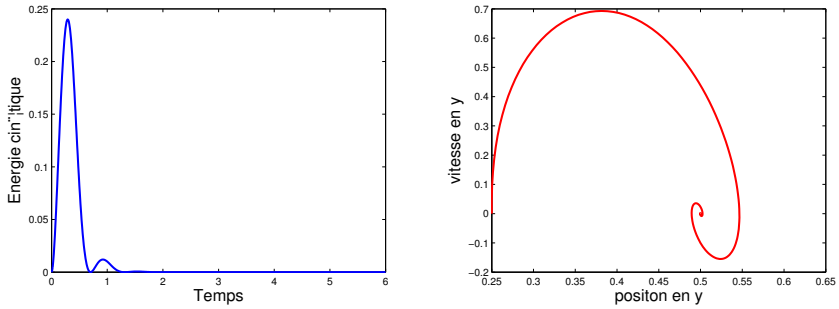


FIGURE 12 – Evolution d'énergie cinétique en fonction de temps (gauche) et evolution d'espace de phase en direction y (droite).

on cherche les particules qui s'accumulent sur les lignes entre les vortex. Quand $St = \frac{1}{2}St_c$, Le Figure montre la particule se déplace sur les lignes entres les vortex et après il rest à la position (0.5,0.5) aussi.

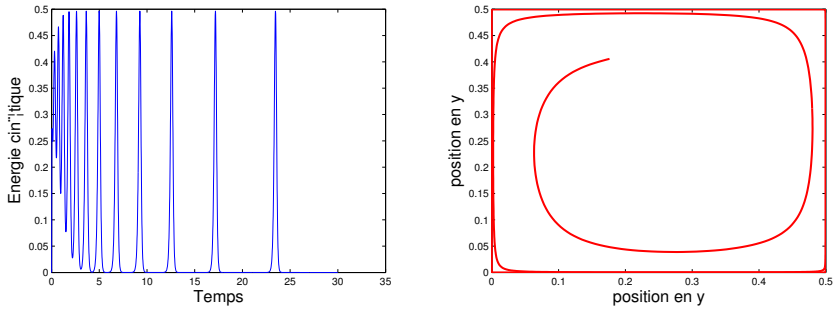


FIGURE 13 – Evolution d'énergie cinétique en fonction de temps (gauche) et evolution d'espace de phase en direction y (droite)pour $St = \frac{1}{2}St_c$.

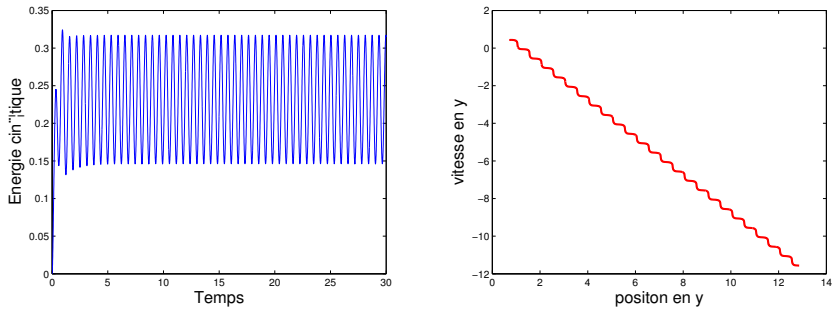


FIGURE 14 – Evolution d'énergie cinétique en fonction de temps (gauche) et evolution d'espace de phase en direction y (droite)pour $St = 5St_c$.

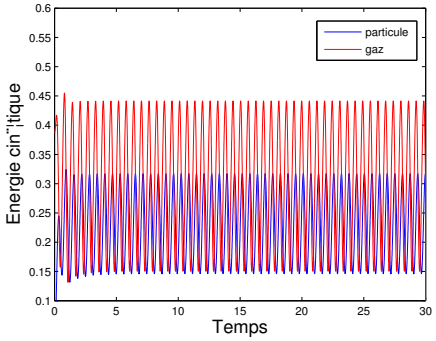


FIGURE 15 – Comparaison d'energie cinétique entre la particule au mouvement périodique et la gaz pour $St = 5St_c$.

Ensuite, on va étudier les particules au mouvement périodique pour $St = 5St_c$. Le Figure 14 montre la particule évolue périodiquement à la fonction sinusoïdal en direction x et y avec une plus forte énergie. Si l'énergie cinétique de particule se compare avec l'écoulement turbulent le long de trajectoire de particule dans le Figure 15, il y a la même fréquence mais une déphasage et une différence d'amplitude entre les deux, ce qui est cohérent avec les résultats 1D obtenus dans ce projet.

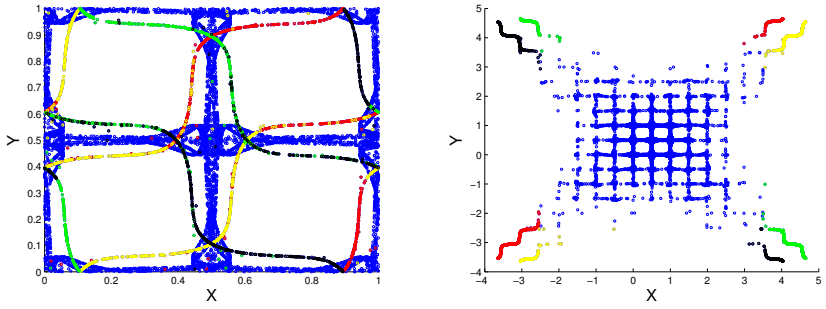


FIGURE 16 – Coloration des particules au mouvement périodique en quatre couleurs pour $St = 5St_c, t = 10s$

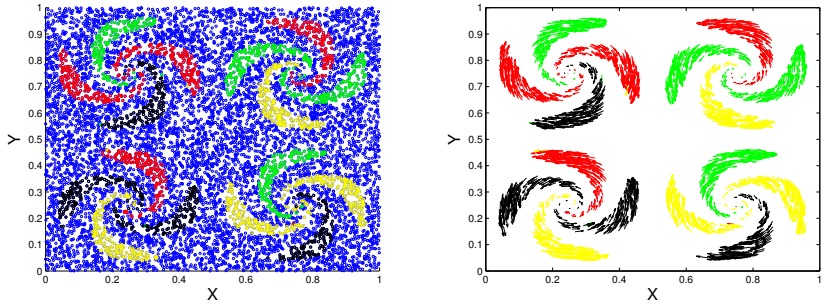


FIGURE 17 – Positions initiales des particules au mouvement périodique (gauche) et direction de mouvement de gaz en quatre couleurs pour $St = 5St_c, t = 10s$.

4.3.3 Analyse de temps de relaxation vers le mouvement périodique

Corrélation de mouvement périodique avec la position initiale des particules En référence à la section 4.3.1, les particules arrivent à un mouvement périodique quand leur position initiale se situe à la zone rouge dans le Figure 11 pour $St = 5St_c, t = 10s$. Pour analyser la relation entre mouvement périodique et la position initiale de la particule, on identifie les directions de mouvement périodique en quatre couleurs dans la Figure 16. Leurs positions initiales et la direction de vitesse de gaz à la position des particules sont montrées dans la Figure 17. Figure 18, 19 et 20 montrent l'évolution des particules en fonction de temps. Les particules en quatre couleurs suivent le gaz et entrent les zones de champ qui ont le plus énergie. Il obtient de plus en plus énergie en fonction de temps et arrivent au mouvement périodique.

Analyse de temps de relaxation vers le mouvement périodique Par rapport au paragraphe précédent, on sait que des particules restent au point

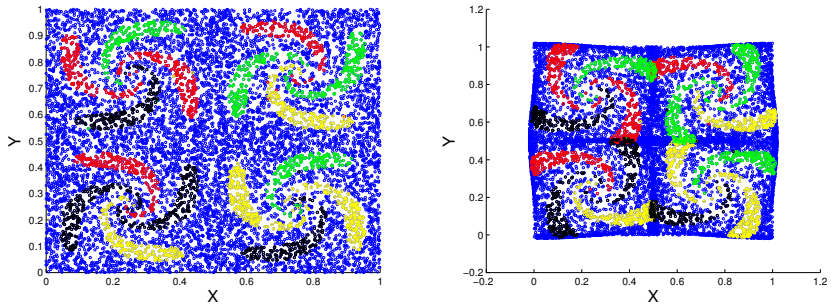


FIGURE 18 – Distribution des particules en quatre couleurs pour $St = 5St_c$,$t = 0.25s$ (gauche) et $t = 0.5s$(droite)

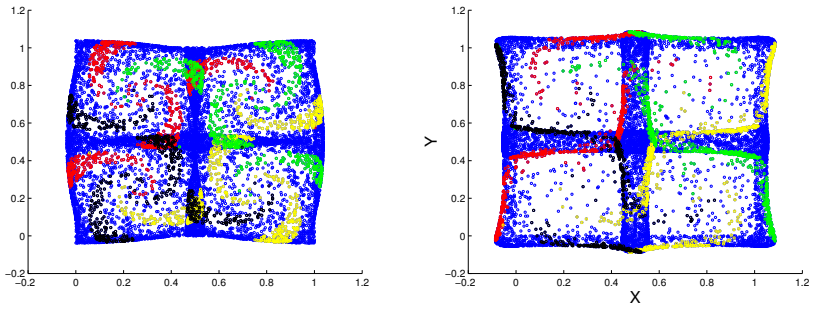


FIGURE 19 – Distribution des particules en quatre couleurs pour $St = 5St_c$,$t = 0.75s$ (gauche) et $t = 1.0s$(droite)

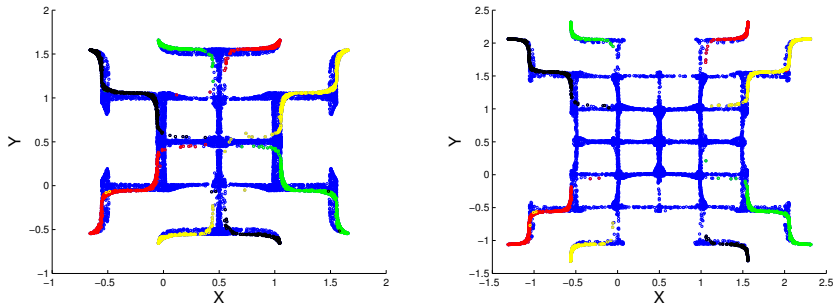


FIGURE 20 – Distribution des particules en quatre couleurs pour $St = 5St_c$,$t = 2.5s$ (gauche) et $t = 4.0s$(droite)

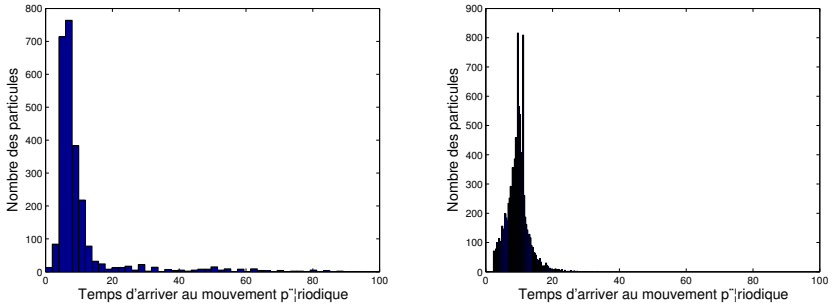


FIGURE 21 – Nombre des particules en fonction de temps d'arriver au mouvement périodique pour $St = 5St_c$ (gauche) et $St = 10St_c$.

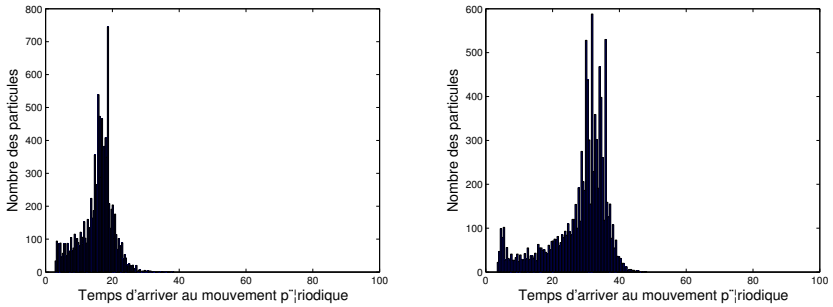


FIGURE 22 – Nombre des particules en fonction de temps d'arriver au mouvement périodique pour $St = 12St_c$ (gauche) et $St = 15St_c$.

d'équilibre ; des particules s'accumulent sur les lignes des vortex ; d'autres se propagent périodiquement à forte vitesse. C'est intéressant de trouver le temps nécessaire aux particules pour arriver au mouvement périodique. On mesure le temps associé afin d'évaluer la vitesse turbulente des particules en moyenne, minimum et maximum dans une période. Les figures 21, 22 et 23 montrent les nombres des particules évoluent en fonction de temps d'arriver au mouvement périodique pour les différents nombres de stokes. Quand le nombre de stokes $St = 20St_c$, toutes les particules vont à l'état d'équilibre. Mais certains particules n'y vont jamais pour $St = 5St_c$. Figure 24 montre que le temps de relaxation périodique moyen évolue en fonction du nombre de Stokes. Quand toutes les particules vont à l'état d'équilibre $St \geq 10St_c$, il est la proportion directe du nombre de Stokes.

Dans cette section, on analyse la corrélation de mouvement périodique avec la position initiale et le temps de relaxation de mouvement périodique. Le processus qui amène sur les trajectoires d'équilibre n'est pas aléatoire et il restera à déterminer quel est le potentiel qui dirige cela dans la suite de ce projet, les présents diagnostics n'ayant pas encore conduit à des conclusions

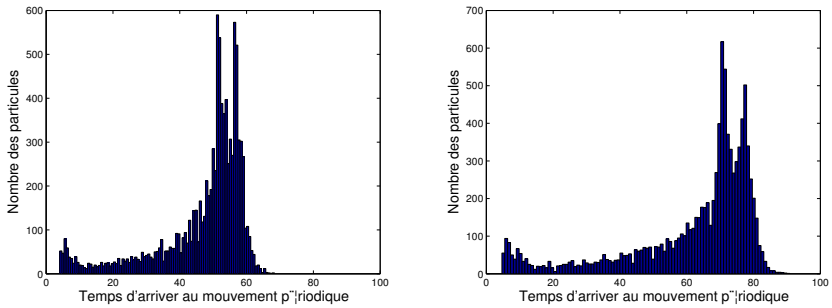


FIGURE 23 – Nombre des particules en fonction de temps d'arriver au mouvement périodique pour $St = 18St_c$ (gauche) et $St = 20St_c$.

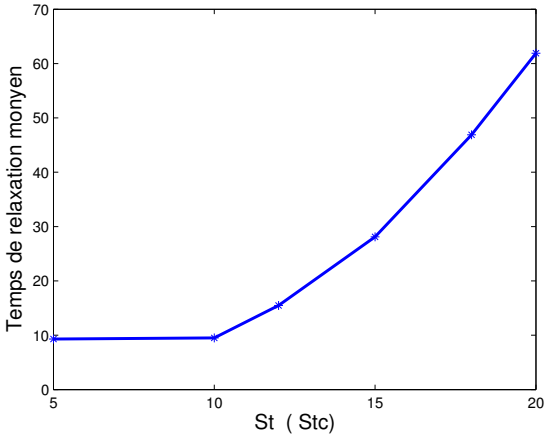


FIGURE 24 – Evolution du temps de relaxation périodique moyen en fonction du nombre de Stokes.

précises.

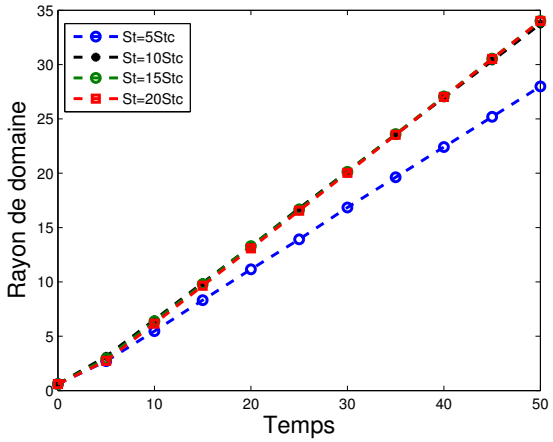


FIGURE 25 – Evolution de rayon de domaine qui consiste 95% des particules avec le nombre de stokes différent

4.3.4 Analyse de diffusion des particules en temps et espace

Dans la Section 4.3.3, les particules se diffusent en espace en fonction de temps. Pour avoir l'évolution des particules en espace, on mesure le rayon de domaine òu il existe 95% de particule en fonction de temps avec les différents nombres de stokes par la façon statistique dans la Figure 25 (Des tests ont été effectués avec des seuils de 90% ou 99% montrent que ce choix n'affecte pas la conclusion). On peut voir que les particules se propagent à la vitesse presque constante et la vitesse de diffusion en espace ne dépend pas forcément du nombre de stokes.

On essaie de trouver la relation de la vitesse de diffusion et la composante turbulente de vitesse particulaire qui est définie comme : $[v'_p = \sqrt{< v_p^2 > - < v_p >^2}$ sachant que la vitesse moyenne des particules est nulle. Figure 26 montre que la composante turbulente de vitesse particulaire est quasiment identique à la vitesse de diffusion du rayon équivalent.

4.3.5 Conclusion sur l'études de Taylor-Green Vortex

La simulation des tourbillons de Taylor-Green montre que les particules se propagent de deux façons : propagation à grande vitesse et mouvement lent au centre. Le type de diffusion de chaque particule dépend de sa position initiale et le nombre de Stokes. En fonction de temps, De plus en plus des particules arrivent au mouvement périodique mais il toujours existe des particules qui restent au point d'équilibre. La vitesses de propagation en rayon pour l'ensemble des particules est presque constante pour les nombres de Stokes différents supérieurs à 10.

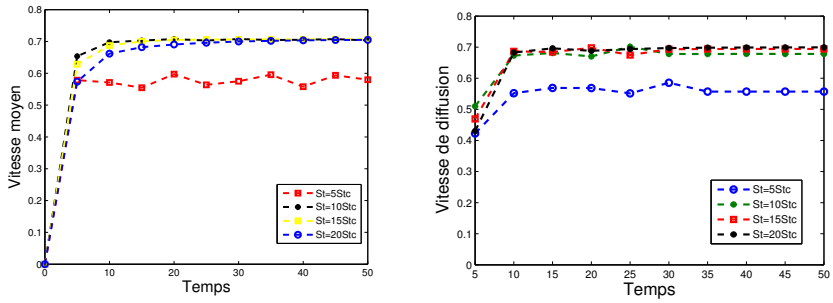


FIGURE 26 – Evolution de la composante turbulent de vitesse particulaire (gauche) et vitesse de diffusion en rayon de la domaine qui contient 95 % des particules (droite) en fonction de temps avec les différents nombres de Stokes.

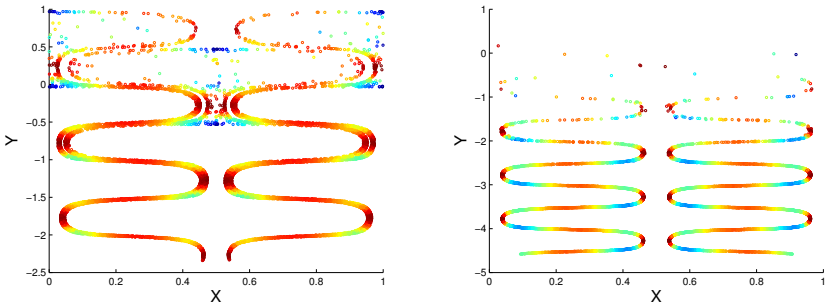


FIGURE 27 – Distribution des particules en présence la gravité pour $St = 1/2St_c$,$t = 4s$ (gauche) et $t = 8s$(droite)

4.4 Diffusion des particules en présence d'une accélération

Parce que le champ précédent étaient figé et on veut voir l'effet d'une accélération supplémentaire sur la dynamique des particules. Donc on suppose que il existe la champ de gravité dans la direction de y dans cette section, l'équation cinétique s'exprime :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_p}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}_p, \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{R}_p(t), t) - \mathbf{v}_p}{\tau_p} + \mathbf{g} \tag{29}$$

où g est la gravité, et on choisit $g = 9.8$ dans ce cas. On simule 10000 particules aléatoirement dans l'espace carré $[0, 1] \times [0, 1]$ aussi comme Figure 8. Quand $St = 1/2Stc$, Figure 27 montre que les particules se propagent en direction y périodiquement dans un temps en coloration des particules par leurs vitesses absolues. Au contraire, quand $St = 5Stc$, Les particule arrivent au mouvement de direction y en ligne comme Figure 28. On essaye d'analyser

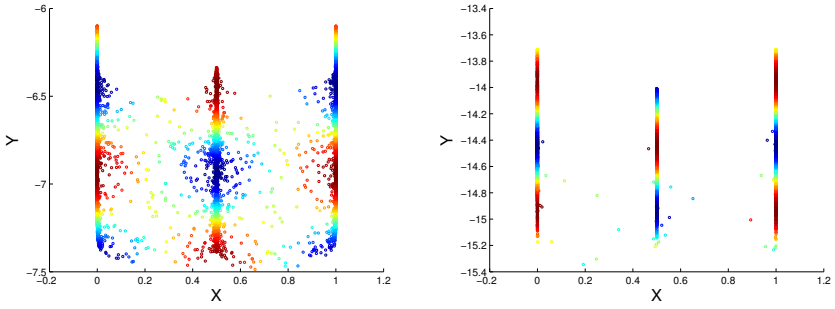


FIGURE 28 – Distribution des particules en existant la gravité pour $St = 5St_c$,$t = 4s$ (gauche) et $t = 8s$(droite)

les mouvement des particules par l'équation adimiensionnelle en direction y :

$$\frac{\mathrm{d}y_p}{\mathrm{d}t} = v_p \qquad \frac{\mathrm{d}v_p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{St}(v_g - \frac{v_p}{F_{rII}}St - v_p) \tag{30}$$

où F_{rII} est le nombre de Froude. Il est défini comme le suit :

$$F_{rII} = \frac{v_p}{g}$$

Donc, l'état d'équilibre est :

$$v_p = v_g - \frac{v_p}{F_{rII}}St$$

Si $St = \infty$, $v_p = -\frac{v_p}{F_{rII}}St$ est constante comme le mouvement dans la Figure 28. Si $St = 0$, $v_p = v_g$, il suit le tourbillon comme le mouvement périodique dans le Figure 27.

On voit donc clairement qu'une accélération supplémentaire peut détruire les structures d'équilibre identifiées précédemment, ce qui est très important d'un potin de vue modélisation.

4.5 Ecoulements turbulents synthétiques

On a étudié la dynamique des particules dans un écoulement sinusoïdal 1D et Taylor-Green Vortex 2D. Les résultats montrent que les comportements des particules dépendent forcément de la structure de champ et du nombre de Stokes. Afin de trouver la dynamique des particules plus complexe et riche, on va étudier les mouvements des particules dans un écoulement turbulent synthétique par superposition des modes.

4.5.1 Superposition des modes 2D

Ecoulement composé par modes de Fourier On simule le champ de vitesse turbulente dans un boîte périodique bidimensionnelle par un grand nombre de modes Fourier aléatoire (IJzermans, Meneguz & Reeks 2010). Les modes sont choisis de telle sorte que le spectre d'énergie d'écoulement turbulent ressemble à la forme proposée originellement par Kraichnan (1970).

Le champ de vitesse est représentée par une série de N modes Fourier.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\sum_{n=1}^{N}\Big[\frac{\mathbf{a}^{(n)}\times\mathbf{k}^{(n)}}{\mid\mathbf{k}^{(n)}\mid}\cos(\mathbf{k}^{(n)}\cdot\mathbf{x}+\omega^{(n)}t)+\frac{\mathbf{b}^{(n)}\times\mathbf{k}^{(n)}}{\mid\mathbf{k}^{(n)}\mid}\sin(\mathbf{k}^{(n)}\cdot\mathbf{x}+\omega^{(n)}t)\Big] \tag{31}$$

Dans notre simulation, on suppose que l'écoulement turbulent est stationnaire, donc les fréquences $\omega^{(n)}=0$. Il est à noté que le champ de vitesse ci-dessus doit satisfaire trois conditions. Premièrement, $\triangle\cdot\mathbf{u}=0$, i.e. l'écoulement est incompressible. Deuxièmement, l'écoulement est isentropique. Troisième, il faut vérifier un spectre d'énergie comme (IJzermans, Meneguz & Reeks 2010) :

$$\int_0^{k_{id}^n}E_{2D}(k)\mathrm{d}k=\int_0^{k_{id}^{(n)}}\frac{64}{\sqrt{18\pi}}k^4\exp(-2k^2)\mathrm{d}k=\frac{(n-1/2)}{N} \tag{32}$$

Afin de garantir la périodicité d'écoulement dans une boîte carrée de dimensions $\Re\times\Re$, les composantes de fréquence $\mathbf{k}_i^{(n)}(i=1,2)$ sont choisis comme :

$$k_1^{(n)}=\frac{2\pi m_1^{(n)}}{\Re},\qquad k_2^{(n)}=\frac{2\pi m_2^{(n)}}{\Re};\qquad m_1^{(n)},m_2^{(n)}\in\mathbb{N} \tag{33}$$

Ici on prend $\Re=10\Re_{11}$, où $\Re=\sqrt{2\pi}$ est le longueur d'échelle d'écoulement (Spelt & Biesheuvel 1997). Les nombres intégraux $m_1^{(n)}$,$m_2^{(n)}$ sont choisis aléatoirement de telle manière que le longueur de $\mid\mathbf{k}^{(\mathbf{n})}\mid$ soit quasiment égale le fréquence idéale $k_{id}^{(n)}$ qui peut être déterminée par le spectre d'énergie de Kraichnan (32)(On omet l'exposant (n) dans la suite). Idéalement, $m_1^2+m_2^2=M_{id}^2$ et $M_{id}^2\equiv k_{id}^2\Re^2/4\pi^2$, afin que on obtient $k=k_{id}$. Pour chaque n, on choisi un nombre aléatoire de une distribution uniforme de $[-M_{id},M_{id}]$ et

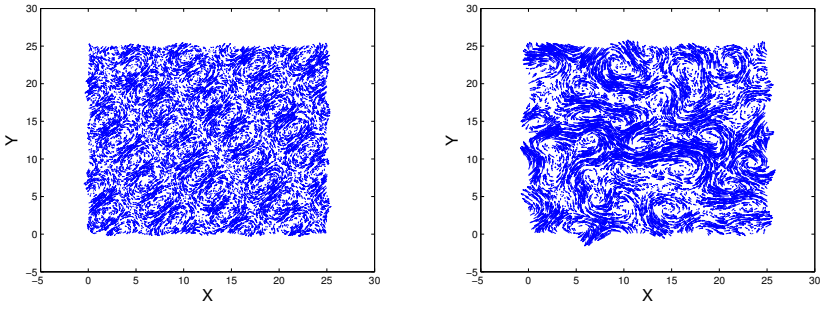


FIGURE 29 – Champ de vitesse turbulente en superposition des modes $N = 3$ (gauche) et $N = 200$ (droite)

on prend le partie entière de ce nombre pour obtenir $\widetilde{m}_1$. Ensuite, le nombre entier $\widetilde{m}_2$ est choisi pour que $M_{id}^2 - \widetilde{m}_1^2 - \widetilde{m}_2^2$ soit minimisé. Le signe de $\widetilde{m}_2$ est choisi aléatoirement. On redistribue les nombres $\widetilde{m}_1$ et $\widetilde{m}_2$ aléatoirement dans deux dimensions pour obtenir les nombres m_1 et m_2 qui sont utilisés dans l'équation (33). Ce processus est répété pour tous les modes.

Les coefficients $a^{(n)}$ et $b^{(n)}$ dans (31) sont déterminées comme suit. D'abord, on prend le longueur de $a^{(n)}$ et $b^{(n)}$ indépendamment d'une distribution Gaussian avec moyenne nulle et variance de $3/N$, en utilisant un algorithme numérique standard issu de Press et al. (1992). Après, on détermine la direction aléatoire de $a^{(n)}$ et $b^{(n)}$ dans trois dimensions en prennant deux nombres aléatoires différents ξ_1, ξ_3 et $\xi_2 = \xi_1 k_2/k_1$, d'une distribution uniforme $[-1, 1]$. Si $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leq 1$, la direction aléatoire désirée est donnée par le vecteur d'unité $(\xi_1/\rho, \xi_2/\rho, \xi_3/\rho)^T$. Si $\rho^2 > 1$, on répète ce processus jusqu'à $\rho^2 \leq 1$.

Résultat numérique de superposition de modes 2D Dans notre études, on suppose que l'écoulement est stationnaire et périodique. Initialement 10000 particules se situent aléatoirement dans un carré $\Re \times \Re$ et leurs vitesses sont nulles. Le champ de vitesse turbulente est représenté dans la Figure 29 et les paramètres du champ turbulent**a**, **b** et **k** sont montrés dans la Figure 30 et 31. Quand le nombre de modes est : $N = 3$. Figure 32 montre que la structure de distribution des particules présente une direction privilégiée et il dépends du nombre de stokes aussi. Quand le nombre de modes est : $N = 200$. Figure 33 montre que la structure de distribution beaucoup plus complexe apparaît.

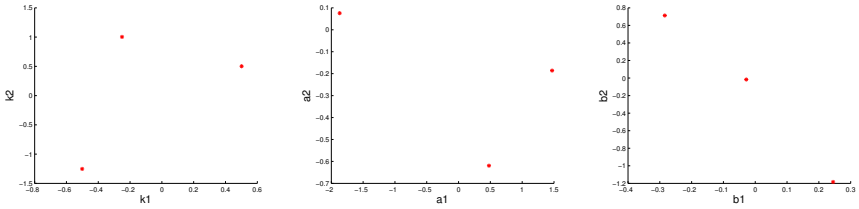


FIGURE 30 – Paramètres du champ turbulent **a**, **b** et **k** en superposition des modes $N = 3$

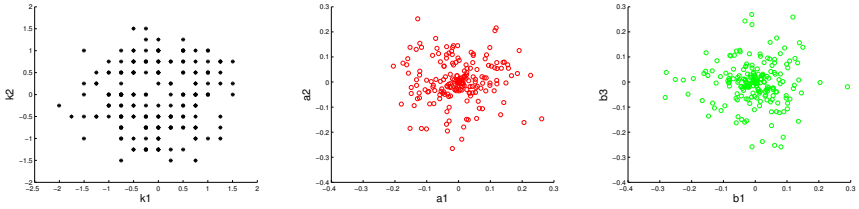


FIGURE 31 – Paramètres du champ turbulent **a**, **b** et **k** en superposition des modes $N = 200$

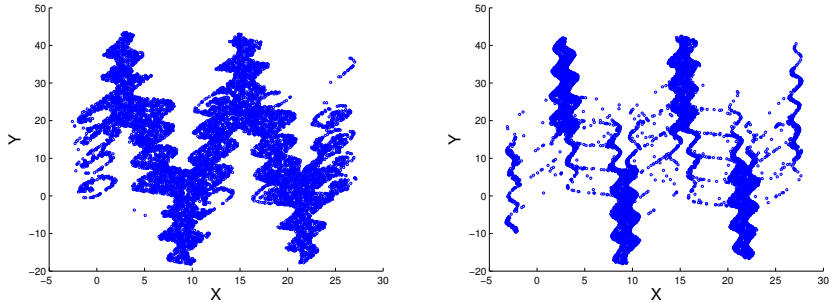


FIGURE 32 – Distribution des particules dans un écoulement de superposition des modes $N = 3$, $t = 10s$ pour $\tau_p = 0.02$ (gauche) et $\tau_p = 0.5$(droite)

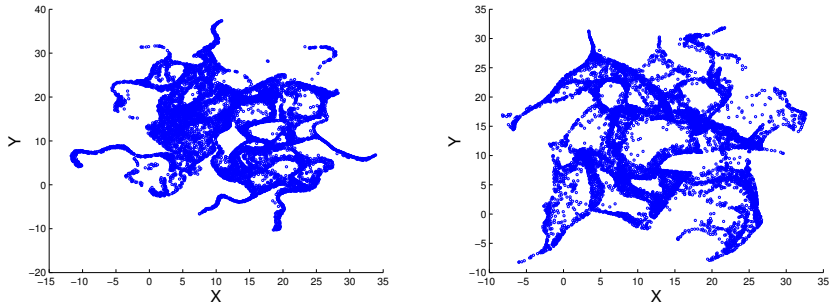


FIGURE 33 – Distribution des particules dans un écoulement de superposition des modes pour $N = 200$, $t = 10s$ pour $\tau_p = 0.2$ (gauche) et $\tau_p = 2$(droite)

4.5.2 Superposition des modes 3D

La simulation 3D est en extension directe de superposition des modes 2D. La champ de vitesse est est représentée par Equation (31) aussi. Il doit satisfaire trois conditions comme dans le cas 2D. Un spectre d'énergie est déterminé comme(IJzermans, Meneguz & Reeks 2010) :

$$\int_0^{k_{id}^n} E_{3D}(k)\mathrm{d}k = \int_0^{k_{id}^{(n)}} \frac{3}{2} E_{2D}(k)\mathrm{d}k = \frac{3}{2}\frac{(n-1/2)}{N} \tag{34}$$

Afin de garantir la périodicité d'écoulement dans une boîte cubique de dimensions $\Re \times \Re \times \Re$, les composants de fréquence $\mathbf{k}_i^{(n)} (i = 1, 2, 3)$ sont choisis comme :

$$k_1^{(n)} = \frac{2\pi m_1^{(n)}}{\Re}, \qquad k_2^{(n)} = \frac{2\pi m_2^{(n)}}{\Re}, \qquad k_3^{(n)} = \frac{2\pi m_3^{(n)}}{\Re}; \qquad m_1^{(n)}, m_2^{(n)}, m_3^{(n)} \in \mathbb{N} \tag{35}$$

Ici on prend $\Re = 10\Re_{11}$, où $\Re = \sqrt{2\pi}$ est le longueur d'échelle d'écoulement (Spelt & Biesheuvel 1997). Les nombres intégraux $m_1^{(n)}$,$m_2^{(n)}$,$m_3^{(n)}$ sont choisis aléatoirement de telle manière que le longueur de $\mid \mathbf{k^{(n)}} \mid$ quasiment égale la fréquence idéale $k_{id}^{(n)}$ qui peut être déterminée par le spectre d'énergie Kraichnan (34) (On dépose l'exposant (n) pour la facilité dans la suite). Idéalement, $m_1^2+m_2^2+m_3^2 = M_{id}^2$ et $M_{id}^2 \equiv k_{id}^2\Re^2/4\pi^2$, afin que on obtient $k = k_{id}$. Dans le cas actuel, M_{id} varie de 1.01(pour $n = 1$) à 34.0 (pour $n = N$). Pour chaque n, on choisi un nombre aléatoire d'une distribution uniforme de $[-M_{id}, M_{id}]$ et on prend le partie entière de ce nombre pour obtenir $\widetilde{m}_1$. Ensuite, on choisi un nouveau nombre aléatoire d'une distribution uniforme de $[-\sqrt{(M_{id}^2 - \widetilde{m}_1^2}, \sqrt{M_{id}^2 - \widetilde{m}_1^2}]$ et prend la partie entière pour obtenir $\widetilde{m}_2$. Finalement, le nombre entier $\widetilde{m}_3$ est choisi pour que $M_{id}^2 - \widetilde{m}_1^2 - \widetilde{m}_2^2 - \widetilde{m}_3^2$ soit minimisé. Le signe de $\widetilde{m}_3$ est choisi aléatoirement. On redistribue les nombres $\widetilde{m}_1$, $\widetilde{m}_2$ et $\widetilde{m}_3$ aléatoirement dans trois dimensions pour obtenir les nombres m_1, m_2 et m_3 qui sont utilisés dans l'équation (35). Ce processus est répété pour tous les modes.

Les coefficients $a^{(n)}$ et $b^{(n)}$ dans (31) sont déterminés comme suit. D'abord, on prend le longueur de $a^{(n)}$ et $b^{(n)}$ indépendamment d'une distribution Gaussienne avec moyen de zéro et variance de $9/2N$, en utilisant un algorithme numérique standard issu de Press et al. (1992). Après, on détermine la direction aléatoire de $a^{(n)}$ et $b^{(n)}$ dans trois dimensions en prendant trois nombres aléatoires différents ξ_1, ξ_2, ξ_3, d'une distribution uniforme $[-1, 1]$. Si $\rho^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_2^2 \leq 1$, la direction aléatoire désirée est donnée par le vecteur d'unité $(\xi_1/\rho, \xi_2/\rho, \xi_3/\rho)^T$. Si $\rho^2 > 1$, on répété ce processus jusqu'à $\rho^2 \leq 1$.

Résultat numérique de superposition de modes 3D Dans notre étude, le nombre de modes est : $N = 200$. L'écoulement est stationnaire et pério-

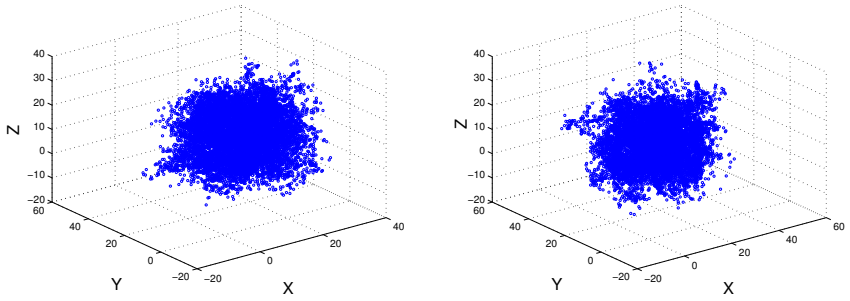


FIGURE 34 – Distriction des particules dans un écoulement de superposition des modes 3D $N = 200$, $t = 10s$ pour $St = 0.02$ (gauche) et $St = 0.2$(droite)

dique. Initialement 10000 particules se situent aléatoirement dans un carré $\Re \times \Re \times \Re$ et leurs vitesses sont nulles. Figure 34 montre la distribution des particules 3D pour les différents nombres de stokes.

Conclusions sur les écoulements turbulents synthétiques Dans ce projet, nous avons mis en place les outils de génération de champs turbulents synthétiques 2D et 3D, et nous avon effectué les première simulations utilisant ces champs. Les prochains travaux pourront donc utilisé ces outils pour des études plus poussées sur ce sujet.

5 Conclusion

Dans un objectif de generation de nouveaux modèles LES, ce projet se concentre à l'études de dynamique des particules par la méthode lagrangien. Dans l'équation cinétique de type Langevin, on modélise un champ turbulent par les écoulements simples et synthétiques dans les contextes 1D, 2D et 3D, ceci afin d'obtenir des simulations simples mais représentative de vrais cas turbulents.

Le champ 1D est défini par la fonction sinus. Les comportements des particules varient quand la structure de champ turbulent ou le nombre de stokes change : des particules suivent le fluide en même fréquence, des particules arrivent aux points d'équilibre et des particules se déplacent à vitesse constante. On voit aussi que quand deux nombres de Stokes sont impliqués, la dynamique des particules est aussi variable selon ces deux Stokes.

Dans un contexte 2D, on simule un champ turbulent par des tourbillons de Taylor-Green. Il existe deux types de propagation des particules dans ces tourbillons : mouvement périodique à grande vitesse et propagation lente au centre. Le type de mouvement de chaque particule dépend de sa position initiale et du nombre de Stokes. En fonction du temps, de plus en plus des particules arrivent au mouvement périodique mais il existe toujours des particules qui restent au point d'équilibre. La vitesse de propagation en rayon pour l'ensemble des particules est presque constante pour les nombres de Stokes différents. En présence de la gravité, les résultats sont différents, l'accélération supplémentaire détruisant les structures d'équilibre mises en évidence dans le cas sans gravité.

Les résultats numériques de la simulation de superposition des modes en 2D et 3D montrent que des comportement des particules beaucoup plus complexe apparaissent.

Les travails suivants de ce projet sont l'analyse des mouvements des particules de la simulation de superposition des modes en 2D et 3D.
Grâce aux résultats numériques et à l'analyse des comportements particulaires, on essayera de déterminer les coefficients de la corrélation résiduelle pour fermer l'équation cinétique filtrée dans LES.

Références

[1] C. Chalons, M. Massot, and A. Vié. An asymptotic preserving numerical scheme for the large eddy simulation of disperse phase flows. *SIAM Journal on Multiscale Modeling and Simulation, in press*, pages 1–26, 2015. available at https ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00958108.

[2] J. Ferry and S. Balachandar. A fast Eulerian method for disperse two-phase flow. *Int. J. Multiphase Flow*, 27 :1199–1226, 2001.

[3] J. Ferry and S. Balachandar. Equilibrium expansion for the eulerian velocity of small particles. *Powder Technology*, 125 :131–139, 2002.

[4] M. Garcia. *Development and validation of the Euler-Lagrange formulation on a parallel and unstructured solver for large-eddy simulation.* PhD thesis, Université Toulouse III, 2009. available online at http ://ethesis.inp-toulouse.fr/archive/00000715/.

[5] F. Laurent and M. Massot. Multi-fluid modeling of laminar polydispersed spray flames : origin, assumptions and comparison of sectional and sampling methods. *Combust. Theor. Model.*, 5 :537–572, 2001.

[6] F. Laurent, A. Vié, C. Chalons, R. O. Fox, and M. Massot. A hierarchy of Eulerian models for trajectory crossing in particle-laden turbulent flows over a wide range of stokes numbers. *Annual Research Briefs of the CTR*, pages 1–12, 2012.

[7] R.J. LeVeque. *Finite volume methods for hyperbolic problems.* Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[8] F.E. Marble. Dynamics of dusty gases. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 2 :397–446, 1970.

[9] E. Masi and Simonin. Algebraic-closure-based moment method for unsteady eulerian simulations of non-isothermal particle-laden turbulent flows at moderate stokes numbers in dilute regime. *Flow Turbulence and Combustion*, 92(1-2) :121–145, 2014.

[10] E. Masi, O. Simonin, E. Riber, P. Sierra, and L.Y.M. Gicquel. Development of an algebraic-closure-based moment method for unsteady eulerian simulations of particle-laden turbulent flows in very dilute regime. *International Journal of Multiphase Flow*, 58 :257–278, 2014.

[11] M. Moreau, O. Simonin, and B. Bédat. Development of gas-particle Euler-Euler LES approach : A priori analysis of particle sub-grid models in Homogeneous Isotropic Turbulence. *Flow, Turb. and Comb.*, 84(2) :295–324, 2009.

[12] R.V.R Pandya and F. Mashayek. Two-fluid large eddy simulation approach for particle-laden turbulent lows. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 45 :4753–4759, 2002.

[13] B. Shotorban and S. Balachandar. A Eulerian model for large-eddy simulation of concentration of particles with small Stokes numbers. *Phys. Fluids*, 19(11) :118107, 2007.

[14] E.F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics.* Springer, 2009.

[15] A. Vié, F. Doisneau, and M. Massot. On the Anisotropic Gaussian closure for the prediction of inertial-particle laden flows. *Communications in Computational Physics*, 17(1) :1–46, 2015.

[16] L.I. Zaichik. A statistical model of particle transport and heat transfer in turbulent shear flows. *Phys. Fluids*, 11(6) :1521–1534, 1999.

[17] L.I. Zaichik, O. Simonin, and V.M. Alipchenkov. An eulerian approach for large eddy simulation of particle transport in turbulent flows. *Journal of Turbulence*, 10(4) :1–21, 2009.